6°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}=?$. Soit la fonction $f(x)=\ln(\cos x)$.

f est dérivable en 0 et $f(0)=0$ et $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0.$$

7°/ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^{\,2}}$. On pose $X=\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^{\,2}}=\lim_{X\to 0^+}\frac{\ln(X+1)}{X^2}=\lim_{X\to 0^+}\frac{1}{X}\cdot\frac{\ln(X+1)}{X}=+\infty$$

car $\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{1}{X}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{\ln(X+1)}{X}=1$.

8°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(X+1)}{X}=1$ $(X=x^2)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=0$.

Solution 2 :

1°/ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^3+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\frac{\ln x^3}{x}+\frac{\ln(1+\frac{1}{x^3})}{x}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[3\ \frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1+\frac{1}{x^3})}{x}]=0+0=0$$

2°/ $$\lim_{x\to+\infty}x^2-\ln(x^3+4)=\lim_{x\to+\infty}x^2-\ln x^3(1+\frac{4}{x^3})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2-\ln x^3-\ln(1+\frac{4}{x^3})=\lim_{x\to+\infty}x^2-3\ \ln x-\ln(1+\frac{4}{x^3})$$